Сибирская математическая олимпиада 2023 1 курс

Задача 1 (предложил Белоусов Д.С., Новосибирский государственный университет). Существует ли отличный от тождественного полином $p(x)$ такой, что все его ненулевые коэффициенты являются нецелыми, и для любых двух различных целых чисел a, b выражение $\frac{p(a)-p(b)}{a-b}$ является целым?

Решение. Ответ: да.

Подходит, например, $p(x) = \frac{x^4+x^2}{2}$:

$$\frac{p(a)-p(b)}{a-b} = \frac{(a-b)(a+b)(a^2+b^2)+(a+b)(a-b)}{2(a-b)} = \frac{(a+b)(a^2+b^2+1)}{2}$$

Данное число целое, так как $a+b$ и a^2+b^2+1 — целые числа разной четности.

Задача 2 (предложил Шефер Е.И., Новосибирский государственный университет). Последовательность $\{a_n, n \geqslant 0\}$ удовлеторяет следующим условиям: $a_0 = 1$, $a_1 = \frac{1}{2}$,

$$a_n = \frac{n}{2}a_{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}a_{n-2} + \frac{(-1)^n(1-n)}{2(n+1)}$$

Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n!}$

Решение. Ответ: $1 - e^{-1}$.

Из условия можно с помощью метода математической индукции упростить выражение до

$$a_n = na_{n-1} + \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

Отсюда получим следующее:

$$a_n = n\left((n-1)a_{n-2} + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\right) + \frac{(-1)^n}{n+1} = n(n-1)a_{n-2} + (-1)^{n-1} + \frac{(-1)^n}{n+1} =$$

$$= \cdots = n!a_0 - \frac{n!}{2!} + \frac{(-1)^2 n!}{3!} + \frac{(-1)^3 n!}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}n!}{n!} + \frac{(-1)^n n!}{(n+1)!}.$$

или, другими словами,

$$\frac{a_n}{n!} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{(-1)^2}{3!} + \frac{(-1)^3}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!} + \frac{(-1)^n}{(n+1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(k+1)!} = 1 - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k!} \to 1 - \frac{1}{e}$$

Задача 3 (предложил Данилов О.А., Новосибирский государственный университет). Пусть непрерывная строго монотонно-возрастающая функция $f(x)$ определена на полупрямой $[0, +\infty)$ и удовлетворяет условию $f(0) = 0$. Пусть функция $g(x)$ — обратная к $f(x)$. Доказать, что для любых натуральных чисел m, n верно неравенство

$$mn \leqslant \sum_{k=0}^{m}[f(k)] + \sum_{s=0}^{n}[g(s)]$$

Решение. Допустим, что $[f(m)] \geqslant n$. Обозначим $[f(s)] = l_s$. Из монотонности следует, что $l_s \leqslant f(s) < l_{s+1}$. Заметим, что в силу непрерывности и строгой монотонности функции $f(x)$ также непрерывна и строго монотонна функция $g(x)$.

$$\sum_{k=0}^{m}[f(k)] = l_1 + l_2 + \dots + l_m;$$

$$\sum_{s=0}^{n}[g(s)] = 1(l_2 - l_1) + 2(l_3 - l_2) + 3(l_4 - l_3) + \dots + p(n - l_p)$$

для некоторого p такого, что $l_p < n \leqslant l_{p+1}$. Отсюда получим

$$\sum_{k=0}^{m}[f(k)] + \sum_{s=0}^{n}[g(s)] = l_1 + (l_2 - l_1) + l_2 + 2(l_3 - l_2) + \dots$$

Тогда для частичной суммы справедливо

$$l_1 + l_2 + \dots + l_p + 1(l_2 - l_1) + 2(l_3 - l_2) + \dots + (p-1)(l_p - l_{p-1}) = pl_p$$

Так как слагаемые $l_{p+1}, l_{p+2}, \dots, l_m > n$, получим

$$\sum_{k=0}^{m}[f(k)] + \sum_{s=0}^{n}[g(s)] = pl_p + p(n - l_p) + l_{p+1} + l_{p+2} + \dots + l_m = pn + l_{p+1} + l_{p+2} + \dots + l_m > pn + (m-p)n = mn.$$

Случай $[f(m)] < n$ доказывается аналогично заменой $f(x)$ на $g(x)$.

Задача 4 (предложил Осипов Н.Н., Красноярский математический центр).
Дан многочлен с целыми коэффициентами

$$f(x) = x^{2m} + x^{m+n} - 4x^m + x^{m-n} + 1$$

где $m > n$ — взаимно простые натуральные числа. Найдите НОД $(f(x), f'(x))$.

Решение. Ответ: $x - 1$.

Легко видеть, что $x = 1$ является двукратным корнем $f(x)$. Покажем, что других общих (комплексных) корней $f(x)$ и $f'(x)$ не имеют. Пусть $z \in \mathbb{C}$ — такой корень. Тогда

$$z^m + z^{-m} + z^n + z^{-n} = 4, \quad m(z^m - z^{-m}) + n(z^n - z^{-n}) = 0$$

Положим $u = z^m, v = z^n$. Тогда

$$u + u^{-1} + v + v^{-1} = 4, \quad m(u - u^{-1}) + n(v - v^{-1}) = 0$$

Если u или v равно 1, то тогда оба числа равны единице, и тогда $z = 1$, так как НОД$(m, n) = 1$. При $u \neq 1, v \neq 1$ найдем решение системы уравнений $(u, v) \in \{(u_0, v_0), (u_0^{-1}, v_0^{-1})\}$

$$u_0 = -\frac{m^2 + 3n^2 + 2n\sqrt{2(m^2 + n^2)}}{m^2 - n^2}, \ v_0 = \frac{3m^2 + n^2 + 2m\sqrt{2(m^2 + n^2)}}{m^2 - n^2}$$

Отсюда u_0 и v_0 — вещественные числа, более того, должно выполняться равенство $u_0^n = v_0^m$. Но $1 < |u_0| < v_0$, поэтому при $m > n$ указанное равенство не может быть верным.

Задача 5 (предложил Петров Ф.В., Санкт-Петербургский государственный университет).
Найдите все способы покрасить натуральные числа в конечное количество цветов так, что цвет суммы зависит только от цветов слагаемых (то есть если для любой пары цветов C_1, C_2, где, возможно, $C_1 = C_2$, существует такой цвет C, что для любых чисел x_1 цвета C_1 и x_2 цвета C_2 число $x_1 + x_2$ — цвета C).

Решение. Ответ: первые несколько чисел покрашены каждое в свой уникальный цвет, после этого цвет зависит от остатка при делении на некоторое число d.

Несложно убедиться, что такие раскраски подходят. Будем писать $x \sim y$, если x, y — одного цвета. Нам удобнее будет описывать отношение эквивалентности $\sim$, а не раскраску (ясно, что это по существу одно и то же). В терминах отношения эквивалентности $\sim$ условие записывается так: если $x_1 \sim y_1$, $x_2 \sim y_2$, то $x_1 + x_2 \sim y_1 + y_2$.

Мы называем целое число $T > 0$ периодом отношения $\sim$, если $n \sim n + T$ для всех достаточно больших n. Если $a \sim b$ и $a > b$, то $b - a$ — период: $n + b - a = (n - a) + b \sim (n - a) + a = a$ при любом $n > a$. Таким образом, поскольку число цветов конечно, то периоды существуют.

Далее, если $T_2 > T_1$ — периоды, то и $T_2 - T_1$ тоже: действительно, $n + T_2 - T_1 \sim n + T_2 \sim n$ для достаточно больших n. Таким образом, если d — минимальный конечный период, то все остальные конечные периоды кратны d. Тогда, если $x \sim y$ при $x > y$, то, поскольку $x - y$ — период, мы заключаем, что $x \equiv y \pmod{d}$. Выберем минимальное $N_0 \in \mathbb{N}$ такое, что при $a, b \geqslant N_0$ и $a \equiv b \pmod{d}$, имеем $a \sim b$. В силу минимальности N_0, $N_0 - 1$ и $N_0 - 1 + d$ не эквивалентны. Осталось доказать, что все натуральные числа, меньшие N_0, образуют синглтонные классы эквивалентности (то есть покрашены каждое в свой уникальный цвет). Предположим обратное, что существуют $x < N_0$ и $k > 0$ такие, что $x \sim x + k$. Имеем $d | k$. Далее,

$$N_0 - 1 = x + (N_0 - 1 - x) \sim (x + k) + (N_0 - 1 - x) = N_0 - 1 + k \sim N_0 - 1 + d.$$

Противоречие.

Сибирская математическая олимпиада 2022 2-6 курсы

Задача 1 (предложил Иванов Д.И., Тюменский государственный университет). Найти все x, при которых выполнено

$$det\begin{pmatrix} 0 & -x & -x^2 & \dots & -x^{n-1} \\ x & 0 & -x & \dots & -x^{n-2} \\ x^2 & x & 0 & \dots & -x^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^{n-1} & x^{n-2} & x^{n-3} & \dots & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Решение. Ответ: при нечетном n — любое число. При четном — $x = 0$.

Обозначим данный определитель за D_n. При нечетном n вынесем минус из каждой строки, тогда $D_n = -D_n \Rightarrow D_n = 0$. Данный факт также следует из четности ранга кососимметрических матриц.

При $n = 2k$:

$$D_{2k} = \begin{vmatrix} 0 & -x & -x^2 & \dots & -x^{n-1} \\ x & 0 & -x & \dots & -x^{n-2} \\ x^2 & x & 0 & \dots & -x^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^{n-1} & x^{n-2} & x^{n-3} & \dots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -x^2 & -x & 0 & \dots & 0 \\ x & 0 & -x & \dots & -x^{n-2} \\ x^2 & x & 0 & \dots & -x^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^{n-1} & x^{n-2} & x^{n-3} & \dots & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -x & 0 & \dots & 0 \\ x & 0 & -x & \dots & -x^{n-2} \\ 0 & x & 0 & \dots & -x^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x^{n-2} & x^{n-3} & \dots & 0 \end{vmatrix} = x \cdot \begin{vmatrix} x & -x & \dots & -x^{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & -x^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x^{n-3} & \dots & 0 \end{vmatrix} = x^2 D_{2k-2} = \dots = x^{2k}.$$

Задача 2 (предложил Шефер Е.И., Новосибирский государственный университет). Последовательность $\{a_n, n \geqslant 0\}$ удовлеторяет следующим условиям: $a_0 = 1$, $a_1 = \frac{1}{2}$,

$$a_n = \frac{n}{2}a_{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}a_{n-2} + \frac{(-1)^n(1-n)}{2(n+1)}$$

а) Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n!}$;

б) Найти предел суммы $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k a_k}{k!}$.

Решение. Ответ: а) $1 - e^{-1}$, б) $\sinh 1$.

Из условия можно с помощью метода математической индукции упростить выражение до

$$a_n = na_{n-1} + \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

Отсюда получим следующее:

$$a_n = n\left((n-1)a_{n-2} + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\right) + \frac{(-1)^n}{n+1} = n(n-1)a_{n-2} + (-1)^{n-1} + \frac{(-1)^n}{n+1} =$$

$$= \dots = n!a_0 - \frac{n!}{2!} + \frac{(-1)^2 n!}{3!} + \frac{(-1)^3 n!}{4!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} n!}{n!} + \frac{(-1)^n n!}{(n+1)!}.$$

или, другими словами,

$$\frac{a_n}{n!} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{(-1)^2}{3!} + \frac{(-1)^3}{4!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!} + \frac{(-1)^n}{(n+1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(k+1)!} = 1 - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k!} \to 1 - \frac{1}{e}$$

Из указанного упрощенного рекурентного соотношения имеем:

$$\frac{a_{2n} - 2na_{n-1}}{(2n)!} = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{(k+1)!} - \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{(k+1)!} = \frac{1}{(2n+1)!}$$

Суммируем полученные выражения:

$$\frac{a_{2n} - 2na_{2n-1} + 2n(2n-1)a_{2n-2} - 2n(2n-1)(2n-2)a_{2n-3} + \dots + (2n)!a_0}{(2n)!} =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k+1)!} \to \sinh 1.$$

Задача 3 (предложил Петров Ф.В., Санкт-Петербургский государственный университет).
Дана функция

$$f(z) = \int\limits_1^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

Докажите, что $f(z)$ не имеет нулей в левой полуплоскости (т.е. при $Re\, z < 0$).
Решение. Положим $z = -a + bi$, $a > 0$ и докажем, что $f(z) \neq 0$. Имеем

$$f(z) = \int_1^\infty t^{z-1} e^{-t} dt = \int_0^\infty e^{(-a-1+bi)s} e^{-e^s} d(e^s) = \int_0^\infty e^{ibs} h(s) ds$$

для положительной убывающей функции $h(s) = e^{-as-e^s}$. Если $b = 0$, то интеграл положителен. Если $b \neq 0$, то

$$Im\, f(z) = \int_0^\infty \sin bs\, h(s) ds = \int_0^\infty h(s) d\left(\frac{1-\cos bs}{b}\right) = -\int_0^\infty \frac{1-\cos bs}{b} h'(s) ds \neq 0.$$

Задача 4 (предложил Петров Ф.В., Санкт-Петербургский государственный университет).
В ассоциативном кольце с единицей R имеет место тождество $(xy - yx)^{100} = 0$ при всех $x, y \in R$. Следует ли из этого, что $(xy - yx)^{99} = 0$ при всех $x, y \in R$?

Решение. Ответ: не следует. Пусть R — кольцо верхнетреугольных комплексных 100×100 матриц. Диагональные элементы xy суть произведения соответствующих элементов x и y, поэтому $xy - yx$ — строго верхнетреугольная матрица, и $(xy - yx)^{100} = 0$ (если $xy - yx = (a_{ij})$, то никакая последовательность $n_1, n_2, \dots, n_{101}$ целых чисел от 1 до 100 не является строго возрастающей, поэтому $\prod_{i=1}^{100} a_{n_i, n_{i+1}} = 0$ — из этого следует, что все элементы матрицы $(xy - yx)^{100}$ равны 0. Также можно было воспользоваться теоремой Гамильтона-Кэли).

С другой стороны, если x — диагональная матрица с элементами (сверху вниз вдоль диагонали) $100, 99, \dots, 1$, а y — стандартная 100×100 нильпотентная верхнетреугольная жорданова клетка, то $xy - yx = y$ и $y^{99} \neq 0$.

Задача 5 (предложил Осипов Н.Н., Красноярский математический центр). Решите уравнение

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

в острых углах, соизмеримых с прямым.

Решение. Ответ: $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}), (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5})$ с точностью до перестановки.

Пусть $\alpha = \frac{a\pi}{N}, \beta = \frac{b\pi}{N}, \gamma = \frac{c\pi}{N}$, где a, b, c, N — натуральные числа, причем $0 < a, b, c < \frac{N}{2}$. Заменив квадраты косинусов на косинусы двойного угла, получим

$$1 + \cos\frac{2\pi a}{N} + \cos\frac{2\pi b}{N} + \cos\frac{2\pi c}{N} = 0 \tag{1}$$

Автоморфизмы кругового поля $\mathbb{Q}(\zeta)$, где $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{N}}$, суть отображения, задаваемые формулой $\zeta \to \zeta^j$, где j — остаток от деления на N, взамно простой с N (множество таких остатков обозначим за $\mathbb{Z}_N^*$). Тогда из (1) следует, что

$$1 + \cos\frac{2\pi aj}{N} + \cos\frac{2\pi bj}{N} + \cos\frac{2\pi cj}{N} = 0, \quad j \in \mathbb{Z}_N^* \tag{2}$$

Сложив все равенства (2), получим

$$\varphi(N) + c_N(a) + c_N(b) + c_N(c) = 0 \tag{3}$$

где φ — функция Эйлера, а c_N — суммы Рамануджана, определяемые формулой

$$c_N(k) = \sum_{j\in\mathbb{Z}_N^*} \cos\frac{2\pi kj}{N} = \sum_{j\in\mathbb{Z}_N^*} \zeta^{kj}.$$

Известно, что

$$c_N(k) = \frac{\varphi(N)\mu(N/(k,N))}{\varphi(N/(k,N))},$$

где $(k, N) = \text{НОД}(k, N)$, а μ — функция Мебиуса. Сократив на $\varphi(N)$, равенство (3) принимает вид

$$1 + \frac{\mu(N/(a,N))}{\varphi(N/(a,N)))} + \frac{\mu(N/(b,N))}{\varphi(N/(b,N)))} + \frac{\mu(N/(c,N))}{\varphi(N/(c,N)))} = 0 \tag{4}$$

Легко заметить, что любая дробь вида $\frac{\mu(N/(k,N))}{\varphi(N/(k,N)))}$ при $0 < k < \frac{N}{2}$ либо равна нулю, либо имеет вид $\frac{\pm 1}{m}$, где m — четное натуральное число. Тогда равенство (4) принимает один из двух видов

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 0 = 0 \tag{5}$$

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0 \tag{6}$$

Далее воспользуемся тем, что $\varphi(m) = 2$ только при $m \in \{3, 4, 6\}$, а также $\varphi(m) = 4$ только при $m \in \{5, 8, 10, 12\}$. Если $\frac{\mu(N/(k,N))}{\varphi(N/(k,N)))} = -\frac{1}{2}$, то $(N/(k, N)) = 3$, откуда $k = N/3$. Если же $\frac{\mu(N/(k,N))}{\varphi(N/(k,N)))} = -\frac{1}{4}$, то $(N/(k, N)) = 5$, откуда $k = tN/5\,(t \in \{1, 2\})$.

В случае (5) имеем $a = b = N/3$, откуда с учетом (1) находим $(a, b, c) = (N/3, N/3, N/4)$.

В случае (6) имеем $a = N/3$, $b, c \in \{N/5, 2N/5\}$. Учитывая (1), получим $(a, b, c) = (N/3, N/5, 2N/5)$.